

## Cálculos Aditivos y Sustractivos

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Bibliografía

Ernel (1991 -1997). *Apprentissages numériques (CP, CE1, CE2, CM1, CM2)*. París: Hatier.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Chamorro, M., Belmonte Gómez, J. M., Llinares, S., Ruiz Higuera, M., & Vecino Rubio, F. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.

<http://es.wikipedia.org>

MHH 2

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Un problema aditivo

- 8 personas acaban de montar en un autocar. Ahora hay 45 personas en el autocar. ¿Cuántas personas había justo antes?
- Cuatro formas de resolución según el nivel de los alumnos

MHH 3

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Un problema aditivo – Primera forma de resolución**

■ 8 personas acaban de montar en un autocar. Ahora hay 45 personas en el autocar. ¿Cuántas personas había justo antes?

~~xxxxxxx~~xxxxxxxx  
 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx  
 xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

**37**

(Alumno novato) Dibuja 45 cruces (o incluso 45 monigotes posiblemente en un autocar); tacha o borra 8 y cuenta los que quedan.

MHH 4

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Un problema aditivo – Segunda forma de resolución**

■ 8 personas acaban de montar en un autocar. Ahora hay 45 personas en el autocar. ¿Cuántas personas había justo antes?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45			

1 1 1 1 1 1 1 1  
 (Arrows pointing from 45 to 37, 44 to 38, 43 to 39, 42 to 40, 41 to 41, 40 to 40, 39 to 39, 38 to 38)

(Alumno novato) No reconoce la operación del problema, pero se construye una representación del mismo en función de la que elige un procedimiento y, por ejemplo, descuenta 8 (de uno en uno) de 45, posiblemente ayudándose de los dedos o de una banda numérica. De alguna manera, hace descender mentalmente uno a uno a los pasajeros que acaban de subir para encontrar la solución inicial.

MHH 5

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Un problema aditivo – Tercera forma de resolución**

■ 8 personas acaban de montar en un autocar. Ahora hay 45 personas en el autocar. ¿Cuántas personas había justo antes?

El alumno reconoce que el problema se basa en la adición con huecos.  
 Resuelve en cierto modo la ecuación:  
 ...+8=45.

MHH 6

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Un problema aditivo – Cuarta forma de resolución**

- 8 personas acaban de montar en un autocar. Ahora hay 45 personas en el autocar. ¿Cuántas personas había justo antes?

(Alumno experto)  
 Reconoce que el problema se basa en una sustracción.  
 Calcula mentalmente (o por escrito o con una calculadora):  
 $45-8$

MHH 7

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Observaciones**

- ¿Qué alumnos han hecho Matemáticas?
- ¿Qué Matemáticas?
  - Conteo
  - Adición
  - Sustracción
- ¿Qué solución espera, en general, el maestro?
- Para resolver el problema, ¿es necesario el conocimiento y el dominio de la sustracción?

MHH 8

---

---

---

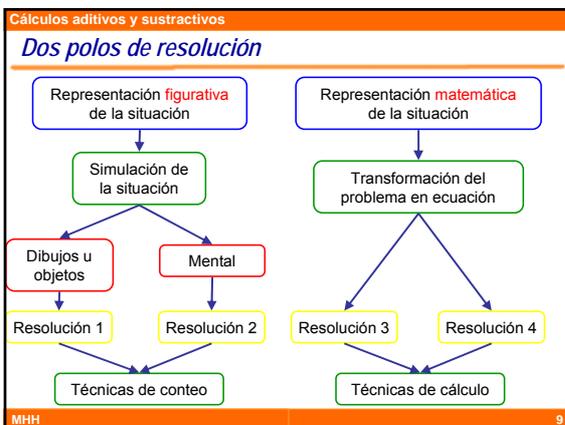
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Consecuencias**

- Aceptar la pluralidad de resoluciones
  - Si no el alumno intenta buscar el camino que cree que el maestro espera que siga, y no persigue comprender la situación
- Favorecer la pluralidad de resoluciones
  - Impulsa a los alumnos a buscar su propia solución
  - Aprendizaje mediante la confrontación de resoluciones
- Aceptar la regresión en las resoluciones
  - Para un alumno, la solución más segura no tiene por qué ser la más económica
  - El aprendizaje se realiza mediante dudas y regresiones antes de que se establezca lo nuevo
- Exigir una formalización temprana puede llevar a errores
  - En el ejemplo anterior, formalizar el problema siguiendo el significado de palabras clave (subir) erróneamente:  $45+8$
- Papel del maestro: provocar el paso de un polo al otro
  - ¿Cómo? Gestionando adecuadamente variables didácticas
  - ¿Por ejemplo?

MHH 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Adición y sustracción: un único campo conceptual**

- En principio, la dificultad de un problema no está ligada a la operación con la que se resuelve
  - Elena ha dado 5 cromos a Pablo. Ahora, Elena tiene 3 cromos. ¿Cuántos tenía antes?
  - Elena tenía 8 cromos. Ha dado algunos a Pablo. Ahora tiene 3 cromos. ¿Cuántos cromos ha dado Elena a Pablo?
- El primero se resuelve con una adición y el segundo con una sustracción
- El primero es resuelto con más dificultad con 7 años que el segundo

MHH 11

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Adición y sustracción: un único campo conceptual**

- Yo tenía 15 canicas. En el recreo he ganado unas cuantas y ahora tengo 24. ¿Cuántas gané en el recreo?
  - Operación en la resolución
    - Adición:  $15+5=20$ , no.  $15+10=25$ , no.  $15+9=24$ . Gané 9 canicas.
    - Sustracción:  $24-15=9$ . Gané 9 canicas.

MHH 12

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Adición y sustracción: un único campo conceptual*

- Yo tenía  $m_1$  canicas. En el recreo he ganado  $t$ . Ahora tengo  $m_2$ .
  - Preguntando por  $m_1$ 
    - ▲ Adición si  $t < 0$ , sustracción si  $t > 0$
  - Preguntando por  $t$ 
    - ▲ Sustracción
  - Preguntando por  $m_2$ 
    - ▲ Adición si  $t > 0$
    - ▲ Sustracción si  $t < 0$

MHH 13

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Adición y sustracción: un único campo conceptual*

- Procedimientos de cálculo para  $30-13$ 
  - Sustractivo:  $30-10=20$ ,  $20-3=17$ . Son 17.
  - Aditivo:  $13+7=20$ ,  $20+10=30$ ,  $7+10=17$ . Son 17.

MHH 14

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Clasificación de problemas aditivos según Vergnaud*

- Entidades significativas a poner en juego:
  - Estados
  - Transformaciones
  - Relaciones estáticas (estados relativos)

MHH 15

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Tipos de problemas*

- I. Composición de dos medidas
- II. Transformación que liga dos medidas
- III. Relación estática entre dos medidas
- IV. Composición de dos transformaciones

MHH 16

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Elementos de los esquemas*

	Representa
	Número natural
	Número relativo
	Composición de elementos de la misma naturaleza
	Transformación o relación (composición de elementos de naturaleza diferente)

MHH 17

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Primera categoría*

Se componen dos estados para dar lugar a un estado

$m_1$

$m_2$

}

$m_3$

$m_1 + m_2 = m_3$

“Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas”

Dos tipos de cuestiones:

1. Combinación de estados: ¿ $m_3$ ?
2. Partición de estados: ¿ $m_1$ ? ¿ $m_2$ ?

¿Operación en cada una de ellas?

MHH 18

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Segunda categoría

Una transformación opera sobre un estado inicial para dar lugar a un estado final

```

graph LR
    m1[m1] -- t --> m2[m2]
            
```

$m_1 + t = m_2$

“Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Perdió 4 canicas. Ahora tiene 3.”

MHH 19

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Análisis de problemas de segunda categoría

t > 0	m <sub>2</sub> ?	1
	t?	2
	m <sub>1</sub> ?	3
t < 0	m <sub>2</sub> ?	4
	t?	5
	m <sub>1</sub> ?	6

```

graph LR
    m1[m1] -- t --> m2[m2]
            
```

$m_1 + t = m_2$

MHH 20

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Análisis de problemas de segunda categoría (m<sub>2</sub>?)

- Había 17 personas en el autobús, suben cuatro. ¿Cuántas hay ahora? (t > 0)
- Juan Pedro tiene 9 caramelos. Le da 4 a su hermanita. ¿Cuántos le quedaron? (t < 0)

Aplicación directa sobre el estado inicial:

- Clase 1: adición siempre posible
- Clase 4: sustracción sólo posible si m<sub>1</sub> suficientemente grande
- Sustracción: *sui generis*, no supone introducción previa de adición (inversa a ésta)

MHH 21

---

---

---

---

---

---

---

---

*Análisis de problemas de segunda categoría (t?)*

- 2. Un parisino sale de vacaciones en su automóvil. A la salida de París su contador kilométrico marca 63809 km; a su regreso marca 67351 km. ¿Cuántos kilómetros viajó en su automóvil durante las vacaciones? ( $t > 0$ )
- 5. Pablo acaba de jugar a las canicas. Tenía 41 canicas antes de jugar. Ahora tiene 29. ¿Cuántas canicas perdió? ( $t < 0$ )

Procedimientos de éxito:

- Complemento
- Diferencia

---

---

---

---

---

---

---

---

*Análisis de problemas de segunda categoría (t?)*

- **Complemento:** buscar, sin sustracción, lo que hay que añadir
  - Números pequeños
  - Números que se prestan a cálculo mental
  - No depende de la transformación
  - Procedimiento por aproximaciones sucesivas al complemento

---

---

---

---

---

---

---

---

*Análisis de problemas de segunda categoría (t?)*

- **Diferencia:** buscar, por sustracción, el valor de la transformación
  - Todos los números
  - Cálculo relacional más complejo
  - Depende de la transformación: positiva o negativa

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Análisis de problemas de segunda categoría ( $m_1$ ?)*

3. Enrique acaba de encontrarse 2'60 euros en la banqueta. Los pone en su monedero. En total tiene 3'90 euros. ¿Cuánto tenía en su monedero antes de encontrarse el dinero? ( $t > 0$ )

6. En 1974 la población de París era de 2844000 habitantes, habiendo disminuido en 187000 personas en cinco años. ¿Cuántos habitantes había en 1969? ( $t < 0$ )

Procedimientos:

- Solución canónica
- Procedimientos alternativos

MHH 25

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Análisis de problemas de segunda categoría ( $m_1$ ?)*

- La solución canónica (válida para todos los casos) implica:
  - Inversión de la transformación directa
  - Cálculo del estado inicial por aplicación al estado final de dicha transformación inversa
  - Si  $b$  es la transformación que hace pasar de  $a$  a  $c$ , entonces  $-b$  es la que hace pasar de  $c$  a  $a$ , y hay que aplicar  $-b$  a  $c$  para encontrar  $a$

MHH 26

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Análisis de problemas de segunda categoría ( $m_1$ ?)*

- Procedimientos alternativos a la solución canónica:
  - *Complemento*: buscar directamente lo que hay que añadir a  $b$  para encontrar  $c$ 
    - ▲ La transformación ha de ser positiva
    - ▲ Números para cálculo mental
  - *Estado inicial hipotético*:
    - ▲ Plantear la hipótesis de un cierto estado inicial
    - ▲ Aplicarle la transformación directa
    - ▲ Encontrar un estado final
    - ▲ Corregir la hipótesis inicial en función del estado obtenido

MHH 27

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Análisis de problemas de segunda categoría**

- Otros factores de dificultad
  - Facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario
  - Orden y presentación de las informaciones
  - Tipo de contenido y de relaciones consideradas

MHH 28

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Tercera categoría**

Una relación une dos estados (relación estática)

$m_1 + r = m_2$

“Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 3”

Mismo análisis que los de segunda categoría

MHH 29

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Cuarta categoría**

Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación

$t_1 + t_2 = t_3$

“En la primera partida Pablo ganó 8 canicas. En la segunda Jaime ganó a Pablo 5; entonces Pablo ha ganado 3”

MHH 30

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Análisis de problemas de cuarta categoría**

- Conocidas las dos transformaciones elementales, encontrar la compuesta ( $t_3$ ?)
- Conocidas la transformación compuesta y una de las elementales, encontrar la otra ( $t_1$ ? ó  $t_2$ ?)
- Influencia de los signos de las diferentes transformaciones
- Influencia de la magnitud relativa de los valores absolutos de las transformaciones elementales
- Ejemplos:
  - Esta mañana he perdido 9 canicas y esta tarde he ganado 12. ¿Qué ha pasado en el total del día?
  - Esta mañana he perdido 9 canicas. He vuelto a jugar esta tarde. En total, en todo el día, he ganado 6 canicas. ¿Qué ha pasado esta tarde?

MHH 31

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Escrituras aditivas y sustractivas**

- Capacitar a los alumnos para que resuelvan el problema
- Que los alumnos puedan expresarse
  - Comunicarse con otros para explicar, intentar convencer, intentar comprender

MHH 32

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Escrituras aditivas y sustractivas**

- Dominio semántico y sintáctico de escrituras que emplean los signos +, - e =
  - Dar significado a escrituras del tipo
    - ▲  $a+b=c$
    - ▲  $a-b=c$
    - ▲  $a-+b+c+d=e$
  - Dominar algunas transformaciones sobre estas escrituras
    - ▲ Extensión o reducción de escrituras aditivas
    - ▲ Igualdades con huecos

MHH 33

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Escrituras aditivas y sustractivas - Calculadora*

■ **Objetivos**

- Comprender que una máquina es capaz de calcular: permite encontrar resultados
  - ▲ Que no conocemos aún
  - ▲ Que no estamos seguros de saber encontrar
- Saber introducir las operaciones y manejarla
  - ▲ Obligan a utilizar un lenguaje específico
  - ▲ Lenguaje específico = escrituras matemáticas de las operaciones

MHH 34

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Escrituras aditivas y sustractivas - Mosaicos*

$5+5$	$4+4$ $3+3$	$5+5$
$1+1$		$6+6$
$8+8$	$2+2$	$9+9$
$4+4$	$7+7$ $2+2$	$8+8$
$6+6$	$7+7$	$1+1$
$5+5$	$3+3$ $9+9$	$0+0$

■ Regla de coloreado:

- La cifra de las unidades es

0 2 4 6 8



MHH 35

---

---

---

---

---

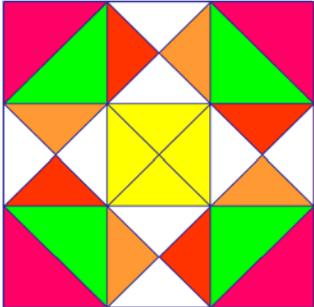
---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Escrituras aditivas y sustractivas - Mosaicos*



■ Regla de coloreado:

- La cifra de las unidades es

0 2 4 6 8



MHH 36

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Escrituras aditivas y sustractivas - Mosaicos*

■ Variantes

- Añadir un número pequeño (1,2,3,4) sin pasar de la decena
  - Regla de coloreados
    - Números menores que 15
    - 15
    - Números mayores que 15
  - Añadir un número pequeño en un sentido y en el otro (para calcular  $2+29$  se puede pensar en  $29+2$ )
    - Regla de coloreados
      - Menores que 20
      - Entre 20 y 30
      - Mayores que 30

MHH 37

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Hacia el cálculo*

■ Objetivos a conseguir por el alumno

- Comprender la necesidad de disponer de un repertorio estructurado de resultados (tablas)
- Ser capaz de encontrar (mentalmente o por escrito) resultados desconocidos a partir de resultados conocidos utilizando el repertorio disponible
- Comenzar a construir una técnica para la adición
- Saber utilizar de forma apropiada la calculadora para obtener algunos resultados
- Saber utilizar oportunamente estas estrategias diferentes para resolver problemas

MHH 38

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos Aditivos y Sustractivos

*Hacia el cálculo*

---

Mejorar las técnicas ligadas al conteo

M. Hidalgo Herrero 39

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Mejorar las técnicas ligadas al conteo*

---

MHH 40

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos Aditivos y Sustractivos

*Hacia el cálculo*

---

Construcción del repertorio

M. Hidalgo Herrero 41

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Construcción del repertorio*

- Actividad: Cartas a dos caras
- Material: Cartas en las que en una cara figuran los cálculos a realizar, y en la otra los resultados

3+2	5	6+4	10	7→10	3
3→10	7	3+7	10	5+3	8
5→10	5	5→7	2	2+8	10
4→10	6	5→9	4	6→10	4

→ significa "de...a" o "para llegar a"

MHH 42

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Construcción del repertorio

- Reglas del juego
  - Se juega por parejas.
  - Se disponen las cartas sobre la mesa de manera que el lado visible sea el de las operaciones.
  - Un alumno propone una carta-pregunta al otro. El otro responde.
  - Se da la vuelta a la carta:
    - Si la respuesta es correcta, el alumno que ha respondido se queda con la carta.
    - Si la respuesta NO es correcta, el alumno que propuso la carta se queda con ella.
  - El alumno que ha contestado propone ahora carta
  - La partida la gana el que al final tenga más cartas (supone más errores por parte del otro alumno)

MHH 43

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Construcción del repertorio

- ¿El repertorio de qué operación se construye con el juego anterior?
- ¿Qué elementos del repertorio son los que se trabajan con el juego anterior?

MHH 44

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Construcción del repertorio

- Objetivo
  - Que los alumnos produzcan rápidamente una respuesta correcta a todas las cuestiones sobre lo que llamamos repertorio aditivo (tabla de la adición)
    - Búsqueda de "a", "b" ó "c" en "a+b=c", siendo a<10 y b<10
- Dos tipos de alumnos (y adultos)
  - Los que han memorizado todo el repertorio aditivo y responden casi de manera refleja a todas las preguntas
  - Los que no han memorizado más que una parte del repertorio y para algunas preguntas reconstruyen el resultado apoyándose en resultados conocidos
    - ¿8+9? 8+8=16 16+1=17
- El dominio del repertorio aditivo no garantiza respuestas correctas a cuestiones del tipo
  - 13-5
  - ¿Cuánto va de 5 a 13?
  - 8+5=13, 13-5=8 y "la distancia de 5 a 13 es 8" se ven independientemente
- Hay que ayudar a los alumnos a la vez a memorizar ciertos resultados y a ser capaces de reconstruir otros
- Hay que trabajar los diferentes repertorios (adición, sustracción, diferencias) intentando progresivamente de establecer los puentes entre los resultados

MHH 45

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Construcción del repertorio

- Útil la adquisición del repertorio correspondiente a las descomposiciones aditivas de 10 y 5: complementos hasta 10 (por sistema decimal)  
 $8+7=8+2+5=10+5=15$
- Complementos de decenas, centenas u otras unidades completas

$$\begin{array}{c}
 37+23+63+27 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 100+50 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 150
 \end{array}$$

MHH 46

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### Construcción del repertorio - Estructuración

- Objetivos:
  - Permitir a los alumnos percibir ciertas propiedades ligadas a la organización del repertorio
  - Tomar conciencia del conjunto de resultados que hay que conocer
  - Llega un momento en el que el repertorio colectivo contiene muchos resultados. Entonces:
    - Los resultados no son sabidos por todos los alumnos, y es difícil de usar el cartel (demasiado tiempo para buscar un resultado)
    - El repertorio colectivo se vacía poco a poco (los resultados conocidos por todos se almacenan en una caja)

3	4	5	6	7
1+2	2+2	3+2		3+4
2+1	1+3	4+1		
0+3	4+0	5+0		
		2+3		

MHH 47

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

### La escoba modificada

- Objetivo: saber descomponer un número inferior o igual a 10 en sumas de varios términos
- Material:
  - Baraja de 4 palos con 10 cartas en cada palo numeradas del 1 al 10
  - Una caja vacía por jugador
  - Fichas

MHH 48

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**La escoba modificada**

- Reglas del juego:
  - Se juega por parejas: A y B
  - El jugador A da 3 cartas al jugador B y toma 3 cartas para sí. Toma 4 cartas y las da la vuelta sobre la mesa.
  - El jugador B comienza: puede tomar, con una de sus cartas, una carta de la mesa del mismo valor o varias cartas cuya suma de valores sea igual al valor de su carta. Recoge su carta y la(s) que ha tomado de la mesa y las coloca boca abajo en su caja. Si no puede tomar ninguna carta de la mesa, pone una de las suyas en la mesa boca arriba.
  - Juegan por turno hasta acabar sus tres cartas. Entonces se reparten otras tres, pero A es B y B es A.
  - Cuando un jugador se lleva todas las cartas de la mesa gana "escoba" y coge una ficha.
  - Si al final quedan cartas sobre la mesa, el que ha recogido por última vez se las lleva todas (pero no hace escoba)

MHH 49

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**La escoba modificada**

- Distribución de puntos al final de la partida
  - 1 punto para el que tenga más cartas (toma una ficha)
  - 1 punto por cada escoba (ficha) que hizo
- El ganador es el que más puntos (fichas) tiene al final

MHH 50

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Dominó**

- Dominó para trabajar repertorio de 4, 7, 9 y 14.

5+9	6+8
-----	-----

7+7	1+8
2+7	6+3

8+6	0+7
4+5	1+6
3+4	5+2

9+5	0+4
7+2	4+0
6+1	3+1
1+3	2+2

MHH 51

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos Aditivos y Sustractivos

*Hacia el cálculo*

---

Calcular con las decenas

M. Hidalgo Herrero 52

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Calcular con decenas*

- Objetivo: extender las primeras competencias ya adquiridas a los cálculos aditivos sobre decenas enteras
- Procedimientos esperados:
  - Sobreconteo de 10 en 10
    - 40+30: "50, 60, 70, son 70"
  - Utilización de resultados memorizados sobre las decenas
    - "20+10 son 30"
  - Reutilización resultados conocidos sobre las unidades con las decenas
    - 20+30 son 50, porque 2+3=5

MHH 53

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Carta-número-blanco*

- Rodear tres cartas que pueden elegirse para dar en el blanco (varias soluciones posibles)

Blanco	Cartas
50	10 40 20 30 10 10
70	50 40 20 10 30 10
60	10 30 20 20 50 20
100	70 20 10 40 30 50

MHH 54

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos aditivos y sustractivos**

*Carta-numero-blanco*

■ Elegir la tercera carta entre las disponibles

Blanco	1ª carta	2ª carta	Cartas disponibles para la 3ª carta			
50	10	20	30	30	10	20
60	20	20	10	30	40	20
90	10	40	20	30	30	50
110	10	40	50	40	60	10
120	60	40	50	40	10	20
100	40	30	20	60	30	40

MHH 55

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos Aditivos y Sustractivos**

*Hacia el cálculo*

---

Hacia el algoritmo de la adición

M. Hidalgo Herrero 56

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos aditivos y sustractivos**

*Hacia el algoritmo de la adición*

■ Objetivo:

- Dar sentido al algoritmo habitual de la adición reutilizando el conocimiento de las reglas de la numeración
  - ▲ Valor posicional (ligado a la idea de agrupamiento)
  - ▲ Equivalencia entre los diferentes órdenes de unidades (ligado a la idea de intercambio)

MHH 57

---

---

---

---

---

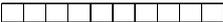
---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Embaldosando**

- Se trata de embaldosar varias habitaciones de una casa, para lo que hay que encargar los azulejos necesarios en un único pedido
- Material
  - Rectángulos de diferentes tamaños con cuadrícula dibujada que representan las habitaciones que hay que embaldosar
  - Cuadrados de cartulina que representan los azulejos
  - Combinaciones de 10 cuadrados de formas diferentes
    - Alineados 
    - Rectángulos (2x5)  
    - Otras formas no rectangulares

MHH 58

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Embaldosando**

- Regla: el número de cuadrados aislados encargado no debe ser superior a 9.
- Observación: el aspecto geométrico no debe ser objeto de atención particular. La elección de los rectángulos propuestos a los alumnos y la organización geométrica de los paquetes de 10 no deben representar dificultades añadidas; se puede sugerir a los alumnos cortar los paquetes de 10 recibidos si la forma de éstos no permite la pavimentación

MHH 59

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Embaldosando**

- Objetivo: comprender y utilizar la equivalencia “una decena es igual que diez unidades”
- Variables didácticas
  - Tamaño y forma de las habitaciones a embaldosar
  - Restricciones sobre el número de cuadrados aislados que se pueden pedir
  - La manera de obtener los cuadrados
  - El modo de validación

MHH 60

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos aditivos y sustractivos**

### Embaldosando

- Cada alumno recibe una "habitación" a embaldosar y debe redactar su pedido
- Se retiran las habitaciones y, por grupos de dos, se reparte otra hoja de pedido
- Los dos alumnos tienen que ponerse de acuerdo porque no pueden dar más que un pedido para los dos
- Variable didáctica: la relación entre los pedidos de los dos alumnos

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 1	Alumno 2
2p	4c	2p	6c
3p	4c	3p	5c
↓ ↓		↓ ↓	
5p		8c	
		↓ ↓	
		6p	
		11c	
		↓ ↓	
		1c	

MHH 61

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos aditivos y sustractivos**

### Técnicas para sumar

- Ligadas al conteo
- Realización de 4+5
- Generalización a números mayores: 240+55

MHH 62

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Cálculos aditivos y sustractivos**

### Técnicas para sumar

- Sumar por separado cada orden de unidad (comenzando por el mayor)
- Posteriormente, aplicable a cálculo mental

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 + 257 \\
 \hline
 600 \\
 80 \\
 12 \\
 \hline
 692
 \end{array}$$

MHH 63

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Técnicas para sumar*

■ Técnica hindú

$$\begin{array}{r}
 598 \\
 + 147 \\
 \hline
 \cancel{6} \cancel{3} 5 \\
 74
 \end{array}$$

MHH 64

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Técnicas para sumar*

■ Por compensación

- Añadir de más para luego quitárselo
- Posteriormente, aplicable a cálculo mental

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 + 90 \\
 \hline
 535
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 435+100 \\
 - 10 \\
 \hline
 525
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 435+100 \\
 535-(100-90)
 \end{array}$$

MHH 65

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

*Técnicas para sumar*

■ Sumar por separado cada orden de unidad (comenzando por el menor)

- Posterior evolución al algoritmo con llevadas

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 + 257 \\
 \hline
 12 \\
 80 \\
 \hline
 600 \\
 692
 \end{array}$$

MHH 66

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para sumar**

- Nuestro algoritmo:
  - Sumar sin descomponer, anotando las llevadas

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 435 \\
 + 257 \\
 \hline
 692
 \end{array}$$

MHH 67

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

- Ligada al conteo
  - Realización de 9-4

MHH 68

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

- Propiedad triangular
  - 953-685

$$953 - 685 = (953 - 700) + (700 - 685) = 253 + 15 = 268$$

MHH 69

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

- Por complemento

$$\begin{array}{r}
 435 \\
 - 67 \\
 \hline
 3 \quad \text{Para hacer 70} \\
 30 \quad \text{Para hacer 100} \\
 300 \quad \text{Para hacer 400} \\
 30 \quad \text{Para hacer 430} \\
 \hline
 5 \quad \text{Para hacer 435} \\
 \hline
 368
 \end{array}$$

MHH 70

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

- Por compensación
  - Restar de más y posteriormente sumar

$$\begin{array}{r}
 564 \\
 - 75 \\
 \hline
 464 \quad 564-100 \\
 + 25 \quad 464+(100-75) \\
 \hline
 489
 \end{array}$$

MHH 71

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

- Técnica árabe

$$\begin{array}{r}
 953 \\
 - 685 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

- 9-6 = 3
- Como 5 < 8, el 3 obtenido se transforma en 2 para restar 15-8
- Como 3 < 5, el 7 obtenido se transforma en 6 para restar 13-5

$$\begin{array}{r}
 9 \ 5 \ 3 \\
 - 6 \ 8 \ 5 \\
 \hline
 \cancel{9} \ 7 \ 3 \\
 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \ 5 \ 3 \\
 - 6 \ 8 \ 5 \\
 \hline
 \cancel{9} \ \cancel{7} \ 8 \\
 2 \ 6
 \end{array}$$

MHH 72

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

■ Descomposición en unidades, decenas y centenas

$$\begin{array}{r} 953 \\ - 685 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 900 + 50 + 3 \\ - 600 + 80 + 5 \\ \hline \end{array}$$

- El 3 de las unidades se transforma en 13 pasando 10 "de las decenas"

$$\begin{array}{r} 900 + 40 + 13 \\ - 600 + 80 + 5 \\ \hline \end{array}$$

- El 40 "de las decenas" se transforma en 140 pasando 10 "de las centenas"

$$\begin{array}{r} 800 + 140 + 13 \\ - 600 + 80 + 5 \\ \hline \end{array}$$

- Se realiza la resta

$$\begin{array}{r} 800 + 140 + 13 \\ - 600 + 80 + 5 \\ \hline 200 + 60 + 8 = 268 \end{array}$$

MHH 73

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

■ Descomposiciones previas

$$\begin{array}{r} 953 \\ - 685 \\ \hline \end{array}$$

- El 3 de las unidades se transforma en 13 pasando de 5 decenas a 4

$$\begin{array}{r} 9413 \\ - 685 \\ \hline \end{array}$$

- El 5 de las decenas se transforma en 15 pasando de 9 centenas a 8

$$\begin{array}{r} 81413 \\ - 685 \\ \hline \end{array}$$

- Se realiza la resta

$$\begin{array}{r} 81413 \\ - 685 \\ \hline 268 \end{array}$$

MHH 74

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

■ Propiedad de invarianza por traslación

● 953-685

- $953 - 685 = (953 + 15) - (685 + 15) = 968 - 700 = 268$

MHH 75

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**Técnicas para restar**

■ Llevada en el sustraendo

$$\begin{array}{r} 953 \\ - 685 \\ \hline \end{array}$$

■ Cuando, al restar, la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo, hay que sumarle 10 al minuendo para poder hacer la resta, y a continuación sumarle uno a la cifra que está a la izquierda de esa cifra del sustraendo.

$$\begin{array}{r} 9 \quad 15 \quad 13 \\ - 6_1 \quad 8_1 \quad 5 \\ \hline 2 \quad 6 \quad 8 \end{array}$$

MHH 76

---

---

---

---

---

---

---

---

Cálculos aditivos y sustractivos

**The End**

MHH 77

---

---

---

---

---

---

---

---